第一届 TI-Nspire 手持技术创新思维解题大赛

部分学生试题答案的评论与介绍

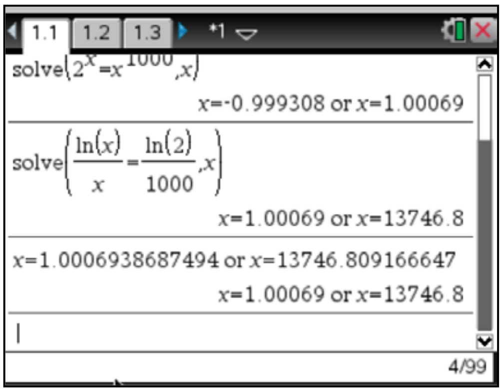
北京市第十九中学 数学高级教师 王玉生

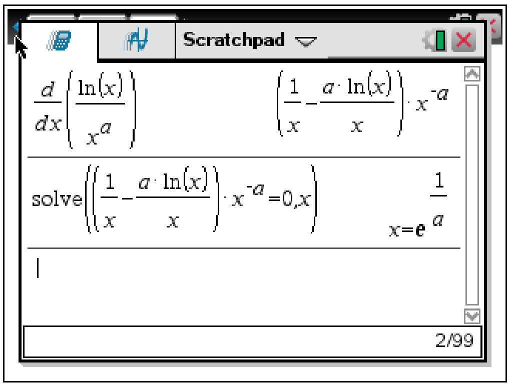
在此次解题大赛中，从收到的学生回复的试题答案来看，有的学生具有很高的数学水平和信息技术应用水平，介绍如下。

第 1 题：

对第二问，直接用计算器求 $2^x = x^{1000}$ 解时，由于数值超出计算器容许范围，计算器只能显示出两个解。乌鲁木齐市第一中学冯懿宣和四川成铁中学的 imath 同学能看出是由于计算器精确度的原因，少了一个解，取对数后计算出解 $x_3 = 137458092$。

这道题实际上是考察函数按增长速度大小排列的顺序是“对、幂、指、阶”，一般大学数学系的学生才知道这个结论。imath 同学注意到了这个性质，比较了幂函数与对数函数的大小，并进行了很多探索。





第 2 题：

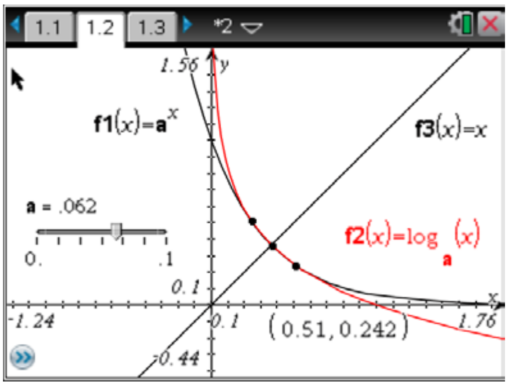
随着 a 取值的变化，求曲线 $y=\log_a x$ 和 $y=a^x$ 的交点个数，这是一个老问题了，此前许多教师都用计算器探讨过这个问题，最近林老师在 TI-Nspire 应用讲座时还提到此问题。难点在于，两曲线相切时参数 a 是否有可表示出的准确值，这个值是多少。

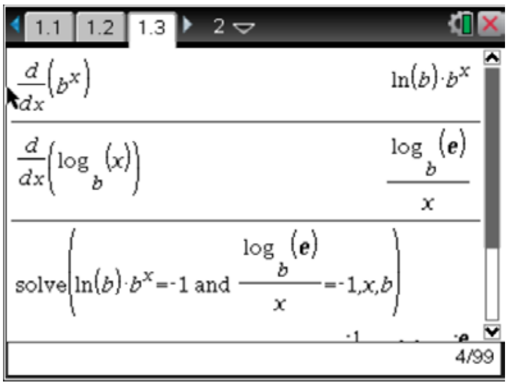
我以前曾用 TI-83 图形计算器研究过此问题，估计 $a\approx1.4447$ 时，两条曲线是相切的，此时 $y=\log_a x$ 与 $y=a^x$ 有唯一解 $x_0\approx2.7181$。 我估计答案是 $x_0=e$，然后由 $(a^x)'=a^x\ln a$，$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，联立方程组 $\begin{cases}\dfrac{1}{x\ln a}=1\\ a^x\ln a=1\end{cases}$，可以求出

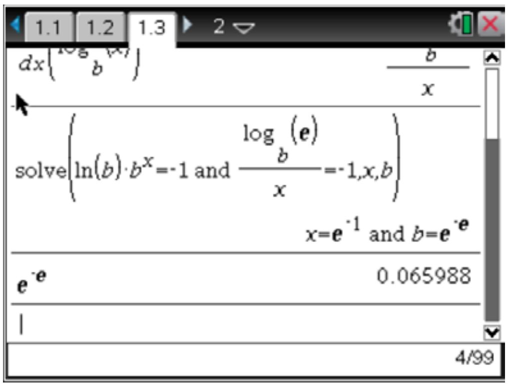
$a = e^{\frac{1}{e}} = 1.444667861\cdots$， $x = e$。

此题用 TI-Nspi re 图形计算器求“图象可以有三个不同交点的范围”，许多同学都利用“插入游标”功能求出了正确答案。实际上可以求出参数 a 的准确值，即是求当 $0 < a < 1$ 时图象的另一个切点坐标，求解 $\begin{cases} \dfrac{1}{x\ln a} = -1 \\ a^x \ln a = -1 \end{cases}$ 即可。

杭州市西湖区学军中学高三年级安泽同学给出了完美的答案，他看出了两图象的公切线斜率为-1，并用计算器求出了准确值。

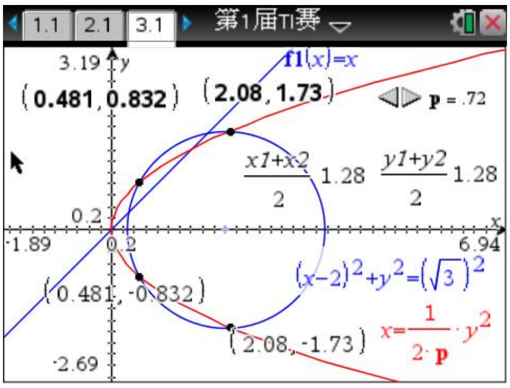


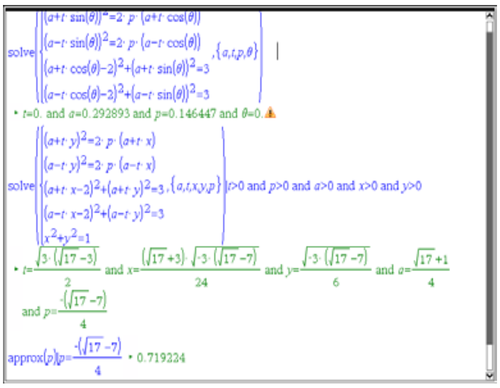




第 3 题：

这道题是中国学生的传统试题，许多学生分别从图形及 *CAS* 运算角度进行探究与求解，得出了准确值与用图形测出的值相互验证。下面是广东中山一中高志雄同学的课件截图。



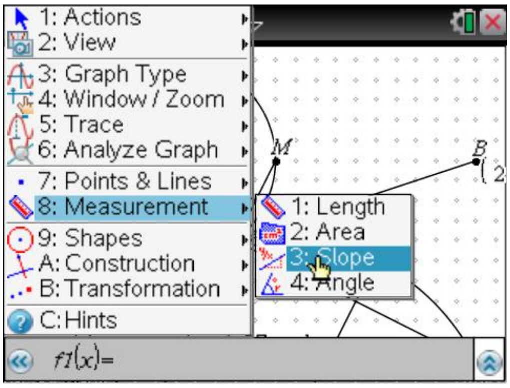


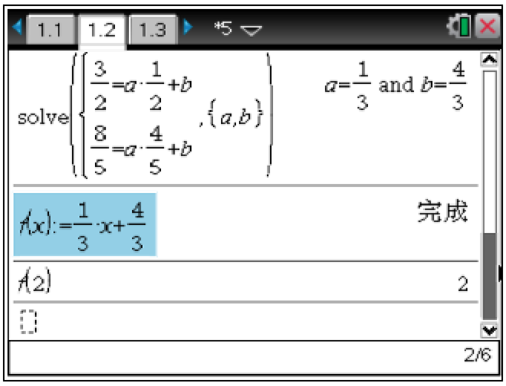
第 4 题：

用计算器求 $(x^2-5\times5)^{(x^2-9\times20)}=1$ 的全部解不难，多数学生都能得出，问题在于我们中学要求底数大于 0，所以需求解 $x^2-25=\pm1$ 和 $x^2-180=0$。imath 同学注意到了这个问题，指出“一般来说指数函数的底数都为正数，而负数一般不讨论，这里不得不讨论负数的情况，感觉不是很顺手”，并能用多种方法进行探索。

第 5 题：

这道题是中国学生的传统试题，一些学生作的的课件不错，可以看出，台湾的数学教育与大陆有许多相同之处。台湾国立师大附中谢昀佐同学解答的也很不错，下面是他的课件截图。

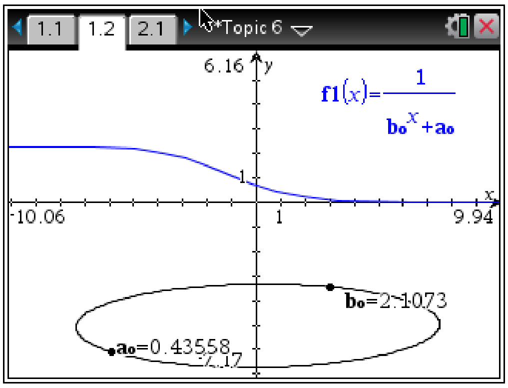


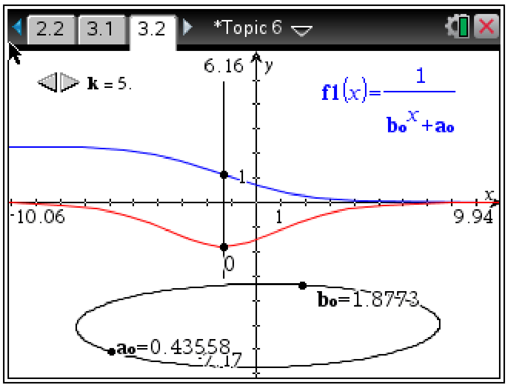


第 6 题：

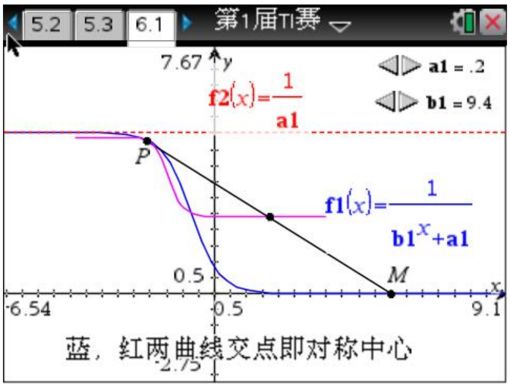
此题应该是大学生的习题，因为中国大陆的高中不学习极限，没有给出渐近线的一般定义，导数也只讲一阶的。此题曲线的对称中心，实际上是曲线的拐点，即二阶导数为 0 的点。

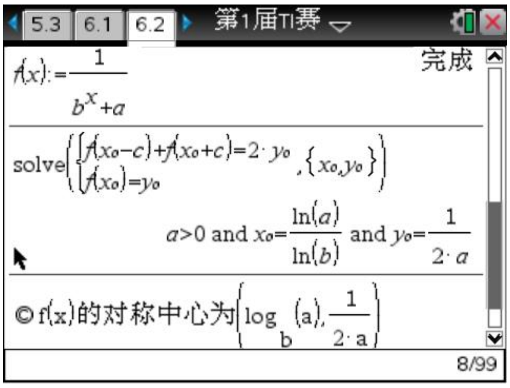
Imath 同学使用自己具有创造性的椭圆游标进行试验，看出“对称中心恰好是在导数的最值，二阶导数为 0.”。

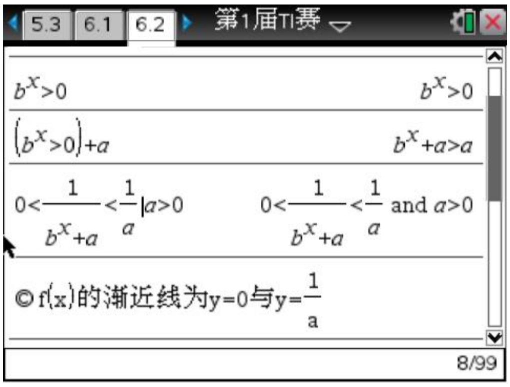




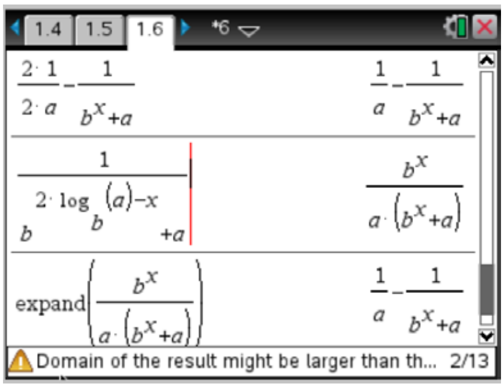
也可以用“中点轨迹”法求对称中心，在 TI 的 qq 群中爱好者们曾探讨过这个问题，这次高志雄同学就用此法求出了对称中心坐标，并能看出渐近线为 y=0 和 $y=\dfrac{1}{a}$，并用计算器推理证明。



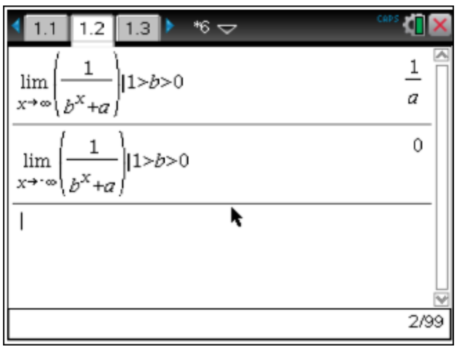


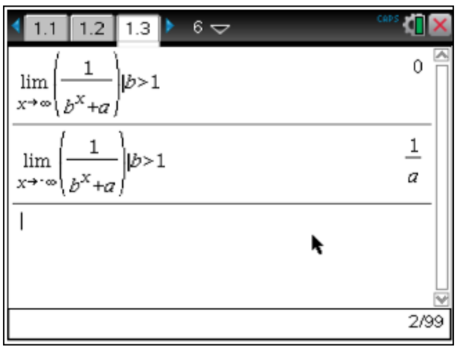


乌鲁木齐市第一中学冯懿宣同学利用 TI-Nspire CAS 技术对称中心进行证明，假设有点$(x, \frac{1}{b^x+a})$ 在 $f(x)$图象上，计算出(2m – x, 2n -y)也在 $f(x)$上（图 6-9）。

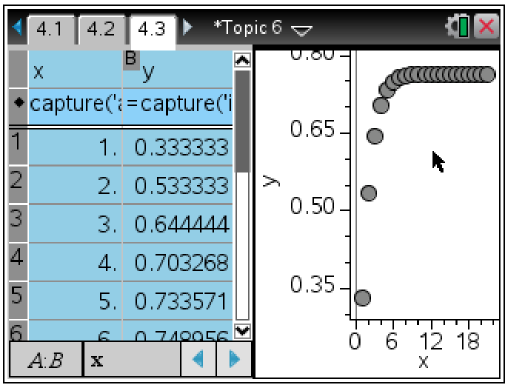


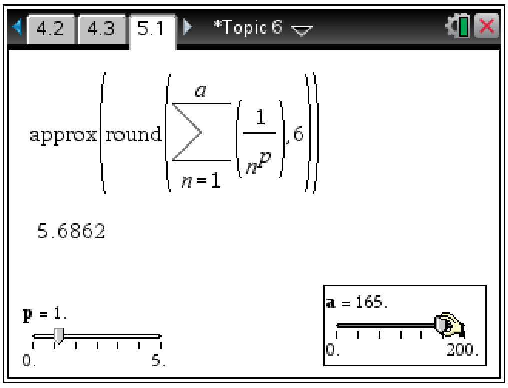
台湾的高中可能讲授极限，台湾国立师大附中的謝昀佐同学直接用极限求出渐近线。





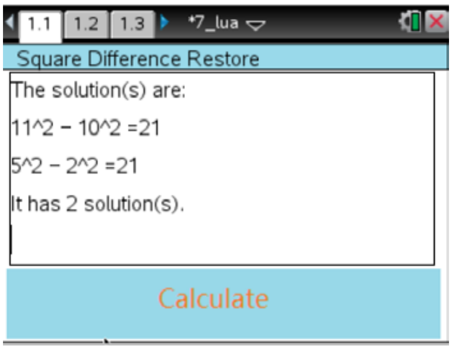
Imath 同学模拟了曲线的轨迹，估计了渐近线的存在性，并探索研究了一些级数的收敛性。



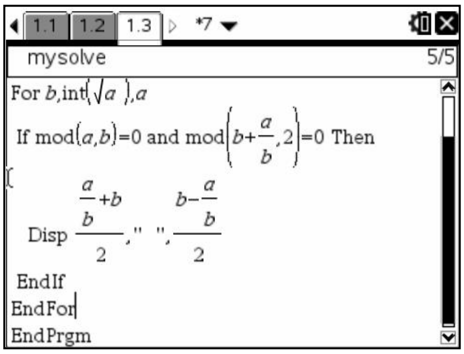


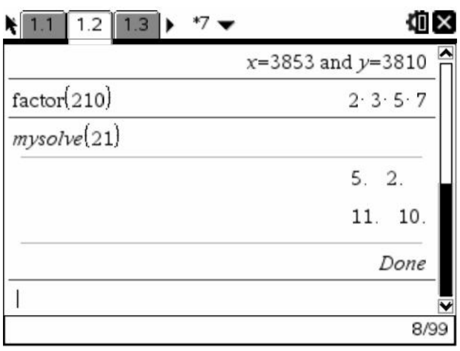
第 7 题：

此题不难，可因式分解求解。有的同学用编程求解, 例如冯懿宣同学,方法有新意。



安泽同学自编程序求解。

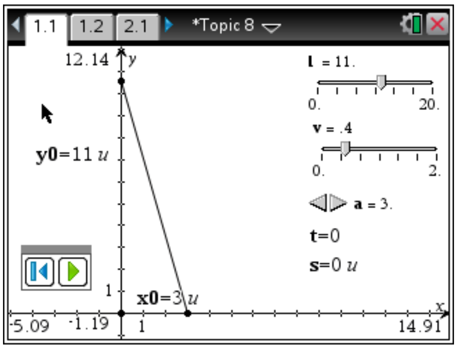


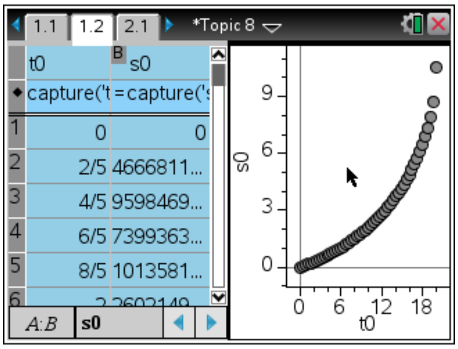


第 8 题：

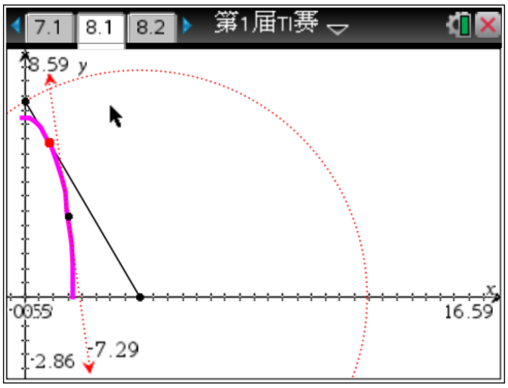
此题在叙述上有不确切的地方，其运动路径显然是一线段，本题应该是求运动距离的函数，然后求导数即为运动速度。

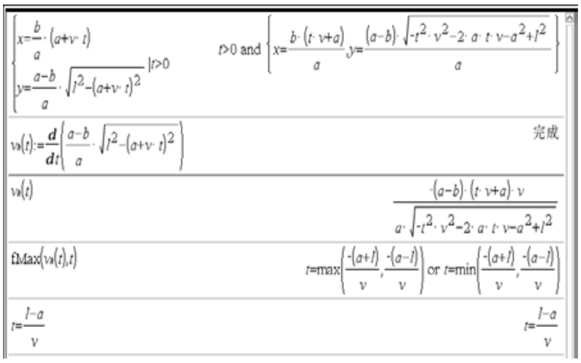
Imath 同学进行了多种方式的探索，并对试题提出了自己的看法。





高志雄同学做出课件模拟试验，说明落地时速度最大，并进行了证明。





第 9 题：

此题的第⑴问多数学习过导数的学生都可以做出来，区别主要看对第⑵问的解释，有几个同学的回答很好。

Imath 同学： 我为了这个模型在视野群做过一些统计调查，调查若用大拇指和食指围成一个圆，则这个圆的内直径为多少。后来统计出，初三的大灰羊为 4cm，初三的然然妹妹有 3cm，高二的婕婕姐姐有 4cm，大一的小米姐姐有 5cm，在西班牙留学的萝卜哥哥有 5.5cm，我有 4cm。

大体上来说在 3~5cm 之间，而能够最舒适地握住，应该将饮料罐调整到一个合适的直径。而我用手来握市面上的可乐饮料罐，体感上来讲已经达到最舒适，我 4cm 的手应该也算大小适中。当然，也可以设计为瓶装的那种，直径是不均匀的，适合各种尺寸的手握，但是那对金属制品不易成型，工艺要求过高。所以从人体舒适度来说，我认为标准尺寸就是最佳尺寸，而没有必要重新设计。

高志雄：标准尺寸不是最佳，仍然被采用，主要原因是标准尺寸的直径与高度的比接近黄金分割点，具有美感. 此比值略小于 0.618，原因是罐顶和罐底的制作成本略高于侧面，所以适当缩小罐顶和罐底的面积，有助于减少制作成本.

謝昀佐：因為還必須要考慮多項因素，比如：物理因素(材料力學的壓力狀態理論)，以及美觀因素。

1.(材料力學的壓力狀態理論)

正圓柱對上下圓盤的壓力為對兩旁的側壓力的兩倍，因此上下厚度，就與側壁厚度不一致了，因此計算所得到的條件、不等式、結果也就不一樣了。

2.液體會因溫度高低影響而熱漲冷縮，若算準恰到好處，有可能在特殊環境下脹大裂開。因此需要計算測量出液體本身以及包裝液體的金屬鋁罐的熱膨脹係數，討論其相關情形即可解決問題。

3.加入液體的機器並非精確度百分之百，仍有誤差值，有可能過裝或少裝，

因此要針對此項來做微調。

4.為了銷售需求，應不會算成正圓柱，有時正上方及下方，會經過特殊非線性圖形的設計。因此就有形態上的誤差。可畫出圖表，針對條件，寫下不等式，就可推算出最優的設計。

安泽：1. 夏天饮料要冰镇，水可能结冰，所以饮料罐的体积至少为饮料体积的

2. 按照最优尺寸，罐子长度为 7.49cm，一般人手的宽度比它长（我就是），这样就少了良好的用户体验

3. 标准比例接近黄金比例，美观

4. 推测:标准比例可能才是最优的，因为顶底比壁厚，所以将罐子拉长一些才节约。

第 10 题：

此题有不少同学设计出了模型，并进行了复杂的运算论证，不一一评论了。

Imath 同学在设计时使用了快速构造函数和 XConstruct 技术，使曲线必然平滑。